



Conception : ESCP BS – HEC Paris

MATHEMATIQUES 2 APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Mardi 2 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Questions préliminaires

Si  $t \in \mathbb{R}$ , on appelle partie entière de  $t$  que l'on note  $[t]$ , l'unique entier tel que  $[t] \leq t < [t] + 1$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$ .

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = +\infty$ .

Première Partie - La loi arcsinus

3. On rappelle que la restriction de la fonction sin à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  est une bijection sur  $[-1, 1]$ .

On note arcsin :  $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sa bijection réciproque.

(a) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ .

(b) Montrer que la fonction arcsin est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

4. (a) Soit  $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $G(x) = 2 \arcsin(\sqrt{x})$ .  
Montrer que  $G$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ , de dérivée  $g$  donnée par

$$\forall x \in ]0, 1[ \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

(b) Etudier la fonction  $g$  et tracer son graphe.

5. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} g(t) & \text{si } t \in ]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

(b) Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . On dit que  $X$  suit la loi arcsinus.  
Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer celle-ci.  
(On pourra considérer le changement de variable  $u = 1 - x$ .)

6. (a) Soit  $U$  une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Montrer que la variable aléatoire  $V = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} U\right)$  suit la loi arcsinus.

(b) À l'aide de la question précédente, compléter les deux lignes de la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi arcsinus :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def arcsinus() :
    U= ...
    V= ...
    return V
```

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 4$  et  $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ . Montrer l'encadrement :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Montrer que les deux inégalités sont inversées si l'on suppose que  $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$ .

8. Soient  $x \in ]0, 1/2[$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'entiers telle que :

- Pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $1 \leq a_n < [nx]$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

Donner un exemple d'une telle suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

On admet que pour tout  $x \in ]0, 1[$  et toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant les mêmes conditions qu'à la question précédente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

## Deuxième Partie - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit  $\theta \in ]0, 1[$  et  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - \theta.$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et  $S_0 = 0$ .

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ .

9. Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de  $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$ .

En déduire la loi de  $\frac{1}{2}(S_n + n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

10. Les variables aléatoires  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont-elles mutuellement indépendantes ?

11. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\overline{S}_n = \frac{1}{n} S_n$ .

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $t_\alpha$  le réel positif tel que  $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

En majorant  $\sqrt{\theta(1-\theta)}$ , montrer que l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S}_n\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S}_n\right)\right]$  est un intervalle de confiance asymptotique d'estimation du paramètre  $\theta$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

12. (a) Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$ .

(b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1 - \theta)^k.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. On introduit la variable aléatoire  $L_n$ , à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , définie par :

$$L_n : \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \max \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_{2k}(\omega) = 0\}. \end{array}$$

La variable aléatoire  $2L_n$  décrit donc le dernier instant avant l'instant  $2n$  où la marche aléatoire prend la valeur 0.

13. Déterminer  $\mathbb{P}(L_n = n)$ .

14. Soit  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .

(a) Montrer l'égalité d'événements suivante :

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0].$$

(b) Justifier que :

$$\mathbb{P}_{[S_{2k}=0]} ([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]) = \mathbb{P} ([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]).$$

On notera  $p_{n-k}$  la valeur de cette probabilité. (\*)

15. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on a :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k}$$

où par convention  $p_0 = 1$ .

A partir de maintenant et dans toute la suite du problème,  $\theta = \frac{1}{2}$ .  
Le calcul explicite des  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est l'objet des questions suivantes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère les événements suivants :

$$\mathcal{D}_n = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k \neq 0] \quad , \quad \mathcal{D}_n^+ = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0] \quad , \quad \mathcal{D}_n^- = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k < 0].$$

On considère également, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'événement :

$$A_{n,r} = \left( \bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n} = 2r].$$

Pour tout entier  $r$ , on pose  $A_{n,r} = \emptyset$  lorsque  $r > n$  ou  $r \leq 0$  et on note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{n,r} = \mathbb{P}(A_{n,r})$ .

16. (a) Montrer que, pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'ensemble  $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\}$  est un intervalle d'entiers.

(b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) + \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-).$$

17. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^n a_{n,r}.$$

18. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

(a) Soit  $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4} a_{n-1,q} & \text{si } q = r - 1 \text{ ou } q = r + 1 \\ \frac{1}{2} a_{n-1,q} & \text{si } q = r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Montrer que pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4} a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2} a_{n-1,r} + \frac{1}{4} a_{n-1,r+1}.$$

19. Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$  on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left( \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right),$$

où l'on pose  $\binom{m}{k} = 0$  dès que  $k \notin \llbracket 0, m \rrbracket$ .

20. On rappelle que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a été définie précédemment (\*).

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

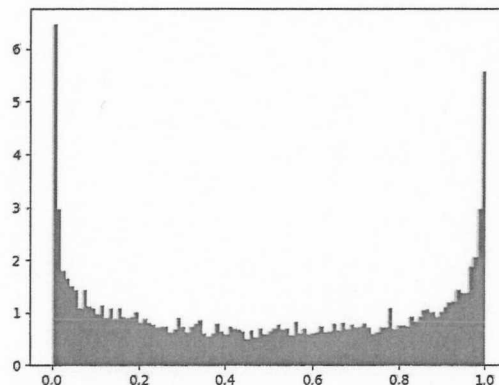
### Troisième Partie - Comportement asymptotique

Dans cette troisième partie, on cherche à étudier la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{L_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

21. (a) Compléter par autant de lignes que nécessaire la fonction Python *DernierPassage* permettant de simuler la variable aléatoire  $L_n$  :

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n):
    L=0
    S=0
    for i in range(1,2*n+1):
        ...
    return L
```

(b) A l'aide de cette fonction, on simule  $N = 10000$  réalisations de la variable aléatoire  $\frac{L_{100}}{100}$  puis on représente les valeurs obtenues sous la forme d'un histogramme à 100 classes. On obtient la figure suivante :



Quelle conjecture peut-on formuler à propos de la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{L_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?

22. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $C_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$  et  $u_n = \ln(C_n)$ .

(a) Montrer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge.

(b) En déduire que la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

On admet que  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  est la limite de cette suite.

23. Soient  $x \in ]0, 1[$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'entiers telle que :

- Pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

(a) Montrer que :

$$\mathbb{P} \left( \frac{L_n}{n} \leq x \right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

(b) Montrer, pour  $n$  suffisamment grand, l'encadrement :

$$m_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

où :

$$m_n = \min \{C_k C_{n-k}, k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket\}, \quad M_n = \max \{C_k C_{n-k}, k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket\}.$$

(c) Soient  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites d'entiers telles que

$$1 \leq \alpha_n \leq \beta_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Montrer que les deux suites  $\left( \min_{k \in \llbracket \alpha_n, \beta_n \rrbracket} C_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left( \max_{k \in \llbracket \alpha_n, \beta_n \rrbracket} C_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes,

de même limite  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

(d) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi}.$$

où la fonction  $G$  a été définie dans la première partie.

24. Soient  $x \in ]0, 1[$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'entiers telle que :

- Pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

(a) Donner un exemple d'une telle suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 0.$$

25. Montrer que la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{L_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi .









Conception : ESSEC – HEC PARIS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Jeu­di 27 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

## Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $[0; n]$  l'ensemble des entiers  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ .
- Si  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ .
- Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes. On pose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  et on note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les coefficients d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  sont notés  $(A)_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ .
- La transposée d'une matrice  $A$  est notée  ${}^tA$ . Lorsque  $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , où  $a \in \mathbb{R}$ , on identifie  $A$  au réel  $a$ . Si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\|V\|$  sa norme euclidienne.
- Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
- Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, on note  $\mathbb{E}(X)$  son espérance, si elle existe. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on appelle moment d'ordre  $k$  de  $X$ , s'il existe, le réel  $\mathbb{E}(X^k)$ . On le note  $m_k(X)$  et on convient que  $m_0(X) = 1$ .
- Si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de deux variables de classe  $C^2$  et  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , on notera  $\nabla g(x_1, x_2)$  et  $\nabla^2 g(x_1, x_2)$ , respectivement, le gradient et la matrice hessienne de  $g$  au point  $(x_1, x_2)$ .

-  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit la fonction puissance  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \begin{cases} x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $f|_J$ , la restriction de  $f$  à  $J$  :

$$f|_J : \begin{aligned} J &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

*L'énoncé comporte trois grandes parties I, II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes.*

*Le mot FIN marque la fin de l'énoncé.*

## Partie I : questions préliminaires, problème des moments

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle à densité.

1. Montrer que dans les cas suivants, la variable  $X$  admet des moments de tout ordre et déterminer ces moments :

- (a)  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
- (b)  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Dans toute la suite, on se donne une suite de réels  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $u_0 = 1$  et un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ .**

On considère le problème suivant appelé **problème des moments** et qu'on note  $\mathcal{M}^*(J)$  :

*Trouver une variable aléatoire réelle  $X$  vérifiant les trois conditions suivantes :*

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  et  $m_k(X) = u_k$ .
- $X$  admet une densité  $f$ , avec  $f|_J$  continue sur  $J$ .
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus J$ ,  $f(x) = 0$ .

*Si  $X$  est une solution de ce problème et  $f$  une densité de  $X$  vérifiant les points précédents, on dit que  $f$  est une densité de  $X$  adaptée à  $\mathcal{M}^*(J)$ .*

Dans ce problème, on s'intéressera uniquement à deux cas :

- Le cas  $J = \mathbb{R}_+$ . Dans ce cas,  $\mathcal{M}^*(J)$  est appelé le *problème de Stieltjes*.
- Le cas  $J = [0, 1]$ . Dans ce cas,  $\mathcal{M}^*(J)$  est appelé le *problème de Hausdorff*.

## Partie II : le problème de Stieltjes

### II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On suppose dans cette partie II.1 que le problème  $\mathcal{M}^*(J)$  avec  $J = \mathbb{R}_+$  admet une solution notée  $X$ . On note  $f$  une densité de  $X$  adaptée à  $\mathcal{M}^*(J)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $H_n$  et  $G_n$  les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad (H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}, \quad (G_n)_{i,j} = u_{i+j-1}$$

2. Ecrire explicitement  $H_3$  et  $G_3$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $W = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que

$${}^tWH_nW = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}, \quad (1)$$

puis que

$${}^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx, \quad (2)$$

où  $P$  est la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , toutes les valeurs propres de  $H_n$  sont positives.

5. Montrer de même que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , toutes les valeurs propres de  $G_n$  sont positives.

6. On suppose uniquement dans cette question que  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \frac{1}{2}$  et  $u_2 = \frac{1}{3}$ .

Montrer que nécessairement  $u_3 \geq \frac{2}{9}$ .

7. On suppose dans cette question seulement qu'il existe un réel  $\theta > 0$  tel que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(t^\theta) dt$  converge.

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$t^n \exp(-t^\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right).$$

(b) En déduire que la série de terme général  $(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}$  diverge.

## 8. Python

On se donne un entier naturel  $N$ . On pose :  $N^* = 1 + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ .

On voudrait vérifier numériquement que la condition suivante, portant sur les  $N + 1$  premiers termes  $u_0, \dots, u_N$ , est vérifiée :

$$\forall n \in \llbracket 0; N^* \rrbracket, \text{ toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives} \quad (CS_N)$$

On rappelle que cette condition est nécessaire d'après la question 4 ci-dessus.

La fonction `test_stieltjes()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel  $U$  (de type `array`) comportant une suite finie de nombres réels  $u_0, \dots, u_N$ .

Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_stieltjes()` renvoie la valeur 1 si la condition  $(CS_N)$  est satisfaite et renvoie la valeur 0 sinon.

On notera que la fonction `eigvalsh()` de la librairie `numpy.linalg` renvoie un tableau unidimensionnel contenant les valeurs propres d'une matrice symétrique donnée en paramètre.

On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).

```

import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
    m = 1+ N // 2
    H = np.zeros((m, m))
    for n in range(1, m+1): # taille de la matrice H_n
        for i in range(_____, _____):
            H[i, n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1, i] = _____
    valp = al.eigvalsh(H)

    for k in range(0, _____):
        if (_____):
            return ____
    return ____

```

## II.2) Non unicité des solutions

On définit la fonction  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$g(x) = \exp(-x^{1/4}) \sin(x^{1/4}) \text{ pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

9. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$$

existent (on convient que  $t^0 = 1$ ).

On note dans la suite

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt, \quad T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt \quad \text{et} \quad V_n = \begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),$$

10. Montrer que  $S_0 = \frac{1}{2}$ . On admet que  $T_0 = S_0$ .

11. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n, \tag{3}$$

$$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1)S_n. \tag{4}$$

12. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$V_{n+1} = (n+1)MV_n, \quad \text{où } M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n! M^n V_0.$$

14. Calculer  $M^4$  et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$S_{4n+3} = 0.$$

15. En utilisant le changement de variable  $x = t^4$  dont on justifiera la validité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 0. \quad (5)$$

16. Montrer qu'il existe deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  positives, distinctes, continues sur  $\mathbb{R}_+$  et telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx \quad (6)$$

existent et sont égales.

17. Que peut-on conclure par rapport au problème  $\mathcal{M}^*(J)$  quand  $J = [0, +\infty[$  ?

### Partie III : le problème de Hausdorff

Dans toute cette partie, on suppose que  $J = [0, 1]$ .

#### III.1) Une condition nécessaire d'existence

On suppose dans ce paragraphe III.1 que le problème  $\mathcal{M}^*(J)$  avec  $J = [0, 1]$  admet une solution notée à nouveau  $X$ . On note  $f$  une densité de  $X$  adaptée à  $\mathcal{M}^*(J)$ .

18. Montrer que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

19. Plus généralement, montrer que pour tous  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0. \quad (7)$$

20. On suppose dans cette question seulement que  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \frac{1}{2}$  et  $u_2 = \frac{1}{3}$ .

Montrer que  $u_3 \in \left] \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right[$ .

21. Revenons au cas général. Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ , la série de terme général  $\frac{u_n}{n^\alpha}$  ( $n \geq 1$ ) est convergente.

Cette affirmation reste-t-elle vraie quand  $\alpha = 0$  ?

#### III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

Revenons à la condition (7) ci-dessus. Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$  on pose

$$\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}. \quad (8)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que la condition (7) est vraie à l'ordre  $n$  si

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \Delta_{n,j} > 0. \quad (CH_n)$$

22. Exprimer  $\Delta_{n,0}$  en fonction de  $u_n$ .

23. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$  on a

$$\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} \quad (9)$$

## 24. Python

La fonction `test_hausdorff()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel  $U$  (de type `array`) comportant une suite finie de nombres réels  $u_0, \dots, u_N$ . Ici  $N$  est calculé à partir de la taille de  $U$  en utilisant la fonction `len()` qui renvoie la taille du tableau.

Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hausdorff()` renvoie un couple comportant les deux éléments suivants :

→ un entier `info` tel que :

- `info = -1` si la condition  $(CH_n)$  est satisfaite pour tout  $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$ .
- `info` est égal au plus petit entier  $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$  pour lequel  $CH_n$  n'est pas satisfaite sinon.

→ un tableau bidimensionnel `Delta` de taille  $(N+1) \times (N+1)$  comportant les coefficients  $\Delta_{n,j}$  pour  $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$  (on pose  $\Delta_{n,j} = 0$  si  $j > n$ ).

*On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).*

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(____, _____):
        Delta[k, 0] = U[____]
        if ((_____ ) and (info == -1 )):
            info = k
        for j in range(____ , _____):
            Delta[k, j] = _____
            if ( ( _____ ) and ( _____ )):
                info = _____
    return (info, Delta)
```

## 25. Python

```
def test3():
    N = 10
    U = np.zeros(N+1)
    for k in range(0, N+1):
        U[k] = 1.0/(k+1) # correspond a une loi uniforme
    V=test_hausdorff(U)
    U[3] = 0.16
    W=test_hausdorff(U)
    return V,W
```

On tape dans la console

```
>>> V,W=test3()
```

Quelles seront les valeurs de  $V[0]$  et  $W[0]$  retournées ?

### III.3) Unicité de solutions à densité de classe $C^1$ .

On suppose dans ce paragraphe que  $X_1$  et  $X_2$  sont solutions du problème  $\mathcal{M}^*(J)$  avec  $J = [0, 1]$ . On note  $f_1$  et  $f_2$  des densités de  $X_1$  et  $X_2$  respectivement adaptées au problème  $\mathcal{M}^*(J)$ . On suppose les restrictions de  $f_1$  et  $f_2$  sur  $[0, 1]$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ . On pose  $h = f_2 - f_1$  et on considère la suite de fonctions polynomiales  $(\widehat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , définies par :

$$\widehat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^n h \left( \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

26. Montrer qu'il existe une constante réelle  $K \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |h(x) - h(y)| \leq K|x - y|.$$

27. Soient  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  fixés tous les deux. Soit  $Y_n$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$ . On pose

$$Z_n = \frac{Y_n}{n}.$$

(a) Montrer que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K \mathbb{E}(|Z_n - x|).$$

(b) En déduire que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K \sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.$$

28. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$|h(x) - \widehat{h}_n(x)| \leq K \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\int_0^1 \widehat{h}_n(x) h(x) dx = 0.$$

30. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx.$$

31. En déduire que  $f_1 = f_2$ . Conclure.

### III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit trois fonctions

$$R_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \int_0^1 t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) dt \quad (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \frac{R_k(\alpha_1, \alpha_2)}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \ln(R_0(\alpha_1, \alpha_2)) - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2$$

On admet que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $R_k$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

32. Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in [-1, 1], 0 \leq e^x - 1 - x \leq Cx^2.$$

33. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- (a) Montrer que  $R_k$  admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point et que pour tout  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) . \quad (10)$$

On admet que  $R_k$  admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable en tout point et que pour tout  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_2 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2) . \quad (11)$$

- (b) Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , en déduire l'identité,

$$\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i. \quad (12)$$

- (c) Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et pour tout  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 (t^i - F_i(\alpha_1, \alpha_2)) (t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)) \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) dt .$$

34. Soit  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Exprimer  $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$  en fonction des dérivées partielles des  $F_k(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $k \geq 0$ .

- (b) En déduire que pour tout  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que  $v \neq 0$  on a

$${}^t v \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0.$$

- (c) En déduire que les valeurs propres de la matrice  $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$  sont strictement positives.

- (d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une variable aléatoire  $X$  solution de  $\mathcal{M}^*(J)$  et de densité  $f$  adaptée à  $\mathcal{M}^*(J)$  telle que

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $G$  admet alors un minimum (local) en  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**FIN**









