Mathématiques
Planche N°A11

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

Dans cet exercice, on ne soulèvera pas de difficulté quant à l'existence et à la manipulation des sommes doubles. Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On écrit que $X << Y$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. (a) Montrer que si $X \leqslant Y$ presque sûrement alors $X << Y$.
   (b) Soient r et s des entiers naturels et $p \in]0,1[$. Montrer que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r,p)$ et Y la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$ avec $r \leqslant s$ alors $X << Y$.
2. On suppose que $X << Y$, avec X et Y indépendantes.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(X \geqslant n)$ puis que :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\left(\sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n)\right)$$
   (b) Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\right) > 1$.
   En conclure que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}$.
3. On suppose encore que $X << Y$ et que $E(X)$ et $E(Y)$ existent.
   Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant n)$. En déduire que $E(X) \leq E(Y)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si $u \circ v$ est un automorphisme alors $v \circ u$ aussi.
2. Montrer que si $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u - \operatorname{Id})$ alors $u(x) \in \operatorname{Ker}(u \circ v - \operatorname{Id})$.
3. On suppose que $u \circ v - \operatorname{Id}$ est un automorphisme.
   (a) Déduire de la question 2 que $v \circ u - \operatorname{Id}$ est un automorphisme.
   (b) Montrer que : $(v \circ u - \operatorname{Id})^{-1} = v \circ (u \circ v - \operatorname{Id})^{-1} \circ \mathrm{u} - \operatorname{Id}$.
4. Montrer à l'aide des questions précédentes que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u \circ v - \lambda\operatorname{Id}$ est un automorphisme, alors $v \circ u - \lambda\operatorname{Id}$ aussi. Que peut-on en déduire ?

Mathématiques
Planche N°10

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $[0,1]$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, puis déterminer sa limite.
2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{P}(\Omega), \mathrm{P})$.
Si A est une partie de Ω, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire l'application définie par :

$$\forall \omega \in \Omega\ ,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in\ A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(XY)$ existe.
2. En utilisant l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathbb{E}((tX+Y)^2)$,
   montrer que :
   $$|\mathbb{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$
   Dans la suite, on suppose que $X(\Omega) \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X\leqslant\alpha\mathbb{E}(X)]}\big) \leqslant \alpha\ \mathbb{E}(X)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X\geqslant\alpha\mathbb{E}(X)]}\big) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathrm{P}(X \geqslant \alpha\ \mathbb{E}(X))}$.
5. En déduire que $\mathrm{P}(X \geqslant \alpha\ \mathbb{E}(X)) \geqslant \dfrac{(1-\alpha)^2(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.